

Übungsblatt 6

Technische Hochschule Mittelhessen
FB MNI, Lineare Algebra für Informatiker, Prof. Dr. B. Just

Wer möchte, kann sich dieses Übungsblatt vom Kommilitonen korrigieren lassen - es werden die Musterlösungen und Beurteilungskriterien hochgeladen.

Wenn Sie Fragen zur Korrektur haben, stehen in den Übungsgruppen Ansprechpartner bereit :).

Zusammenfassung der Korrektur

Aufgabe: 1: 20... von 20; 2: 20... von 20; 3: 20... von 20; 4: 20... von 20; 5: 20... von 20.

Erreichte Punkte insgesamt: 100..... von 100

Schulnoten: 1 ab 87,5 Punkten, 2 ab 72,5 Punkten, 3 ab 57,5 Punkten, 4 ab 50 Punkten, nicht ausreichend unter 50 Punkten. Punkte:

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Weiter seien $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $T_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 1 & 0 & \\ & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

5×5 -Matrizen, wobei die leeren Stellen jeweils Nullen enthalten.

- Bitte berechnen Sie $T_1 \cdot A$, $T_2 \cdot A$ und $T_3 \cdot A$.
- Welche Zeile(n) von A wurden durch die Multiplikationen aus a.) verändert? Wie?

Lösung Aufgabe 1:

Bitte auf der Rückseite lösen :-)

Lösung Aufgabe 1:

a.)

$$T_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2\lambda & 0 & \lambda & 2\lambda \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$T_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & 0 & & 1 \\ & \lambda & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1+2\lambda & 2+2\lambda & 3+2\lambda & 4+2\lambda \end{pmatrix}$$

$$T_3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b.)

Durch Multiplikation von links mit T_1 wurde die **..vierte..** Zeile von A verändert.

Zeile alt: ... $(2, 0, 1, 2)$ Zeile neu: $(2\lambda, 0, \lambda, 2\lambda)$

Veränderung: **Die vierte Zeile wurde mit λ multipliziert**.....

Durch Multiplikation von links mit T_2 wurde die **...fünfte.....** Zeile von A verändert.

Zeile alt: $(1, 2, 3, 4)$ Zeile neu: $(1 + 2\lambda, 2 + 2\lambda, 3 + 2\lambda, 4 + 2\lambda)$

Veränderung:**Zur fünften Zeile wird λ mal die zweite Zeile hinzugezählt**.....

Durch Multiplikation von links mit T_3 wurden die **.zweite und vierte..** Zeile von A verändert.

Veränderung: ...**Die zweite und vierte Zeile wurden vertauscht**.....

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Durch welche elementare Zeilenumformung wird A auf die Gestalt $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gebracht? Bitte geben Sie die Matrix T_1 an, für die $T_1 \cdot A$ diese Matrix ist.

b. Durch welche weitere elementare Zeilenumformung wird nun die Gestalt $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ erreicht? Bitte geben Sie die Matrix T_2 an, für die $T_2 \cdot T_1 \cdot A$ diese Matrix ist .

c. Nun soll die 2×2 - Matrix aus den ersten beiden Elementen der ersten und zweiten Zeile eine Diagonalmatrix werden. Durch welche weitere elementare Zeilenumformung wird die Gestalt $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ erreicht? Bitte geben Sie die Matrix M an, für die $M \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot A$ diese Matrix ist.

d. Bitte berechnen Sie $M \cdot T_2 \cdot T_1$. Dieses Produkt aus den drei verwendeten Elementarmatrizen beschreibt die Hintereinanderausführung der elementaren Zeilenumformungen.

Lösung Aufgabe 2:

a.) Erste elementare Zeilenumformung:

Zeilenumformung in Worten
Vertauschen der erste und der dritten Zeile

Transformationsmatrix T_1
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b.) Zweite elementare Zeilenumformung:

Zeilenumformung in Worten
Subtraktion des Zweifachen der ersten Zeile von der zweiten Zeile

Transformationsmatrix T_2
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c.) Dritte elementare Zeilenumformung:

Zeilenumformung in Worten
Addition der zweiten Zeile zur ersten

Transformationsmatrix M
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.) Beschreibung der Hintereinanderausführung der drei Transformationsmatrizen $M \cdot T_2 \cdot T_1$?

Ergebnismatrix
 $M \cdot T_2 \cdot T_1 =$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnung

$$\begin{aligned} M \cdot T_2 \cdot T_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Der Gauss-Algorithmus vertauscht, wenn er in einem Diagonalelement eine Null vorfindet, gegebenenfalls die Zeile des Diagonalelementes mit einer weiter unten stehenden Zeile. Es stellt sich die Frage, ob die Ergebnismatrix stets gleich ist, unabhängig davon, mit welcher Zeile er genau vertauscht. Durch die Überlegungen dieser Aufgabe wird die Frage geklärt.

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ alle nicht Null, und es seien (a, b) und $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig (was im \mathbb{R}^2 - und nur dort - ja genau bedeutet, dass sie keine Vielfachen voneinander sind).

a.) Bitte wenden Sie den Gauss-Algorithmus an auf die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

b.) Bitte wenden Sie den Gauss-Algorithmus an auf die Matrix $\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$.

c.) Wir betrachten nun die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$. Der Gauss-Algorithmus, angewendet auf diese

Matrix, findet im ersten Diagonalelement eine Null und muss die erste Zeile mit einer der Folgezeilen vertauschen. Ergibt sich in der oberen Dreiecksmatrix, die er erzeugt, ein Unterschied, wenn er die erste mit der zweiten oder die erste mit der dritten Zeile vertauscht?

Lösung Aufgabe 3:

a.) Subtraktion des c/a -fachen der ersten Zeile von der zweiten:

$$A^1 = T_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -\frac{bc}{a} + d \end{pmatrix}$$

b.) Subtraktion des a/c -fachen der ersten Zeile von der zweiten:

$$A^1 = T_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a}{c} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & -\frac{ad}{c} + b \end{pmatrix}$$

c.) Die Ergebnisse sind unterschiedlich, denn im einen Fall ist der erste Zeilenvektor der Ergebnismatrix $(a, b, 0)$, im zweiten Fall ist er $(c, d, 0)$. Denn der Vektor, der im ersten Schritt in die erste Zeile getauscht wird, wird im Laufe des Algorithmus nicht mehr verändert. Da nach Voraussetzung (a, b) und (c, d) nicht gleich sind, sind die Ergebnisse unterschiedlich.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

a.) Bitte wenden Sie den Gauss-Algorithmus an auf die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ -2 & 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$.

b.) Bitte machen sie die Probe für Ihr Ergebnis aus a. (Es muss ja herauskommen, dass das Produkt der erzeugten Transformationsmatrizen mit A die erzeugte obere Dreiecksmatrix ist).

Lösung Aufgabe 4:

a.)

Zeilentransformation	Transformations-Matrix	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ -2 & 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$	$= A^{(0)}$
Vertausche erste Zeile mit zweiter Zeile	$T_1 = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ -2 & 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$	$= A^{(1)}$
Addiere (-2)-faches der ersten Zeile zur dritten Zeile	$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ -2 & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$	$= A^{(2)}$
Addiere 2-faches der ersten Zeile zur vierten Zeile	$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 2 & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	$= A^{(3)}$
Addiere (-2)-faches der zweiten zeile zur vierten Zeile	$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & -2 & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$= A^{(4)}$

b.) Zu zeigen ist: $T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot A = A^{(4)}$

Es gilt wegen: $T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & -2 & 1 & \\ -2 & 2 & & 1 \end{pmatrix}$, $T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5 (20 Punkte)

- a.) Bitte wenden Sie den Gauss-Jordan-Algorithmus an auf die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- b.) Bitte machen Sie die Probe für das Ergebnis aus a. .

Lösung Aufgabe 5:

a.)

Zeilentransformation	Transformations-Matrix	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$= B^{(0)}$
Addiere 4-faches der vierten zur dritten Zeile	$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & 4 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$= B^{(1)}$
Addiere (-1)-faches der vierten Zeile zur zweiten Zeile	$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & -1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$= B^{(2)}$
Addiere (-5)-faches der vierten Zeile zur ersten Zeile	$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & & -5 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$= B^{(3)}$
Addiere (-1)-faches der zweiten Zeile zur ersten Zeile	$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$= B^{(4)}$

b.) Zu zeigen ist: $T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot B = B^{(4)}$

$$\text{Es gilt wegen: } T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & -4 \\ & 1 & & -1 \\ & & 1 & 4 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$